جبر و احتمال

شامل مباحث:

- استدلال ریاضی
- جبر مجموعه ها
- ضرب دکارتی

مؤلف: مهندس علیرضا تفرشی
(سال تحصیلی ۸۸_۸۷)

استدلال ریاضی

۱- شهود: شهود می‌تواند یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال باشد.

۲- انواع استدلال:

الف) استدلال تمثیلی یا قیاسی: یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است.

ب) استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات، را گویند. این روش نتیجه‌گیری از جزء به کل است.

پ) استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم. این روش نتیجه‌گیری از کل به جزء است.

۳- اصل استقراء: اگر $P(n)$ حکمی در مورد عدد طبیعی n باشد و داشته باشیم

الف) $P(1)$ درست است.

ب) اگر $P(k)$ درست باشد آنگاه $P(k+1)$ نیز درست است.

آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است.

۴- اصل استقرای تعمیم یافته: فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی باشد بطوریکه

الف) $P(m)$ برای $m \geq 1$ درست باشد.

ب) از درستی $P(k)$ که $k \geq m$ درستی $P(k+1)$ نتیجه شود،

آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.

۵- اصل استقرای قوی ریاضی: فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی باشد بطوریکه

الف) $P(1)$ درست باشد

ب) اگر به ازای تمامی مقادیر طبیعی k که $k<m$ از درستی $P(k)$ بتوان درستی $P(m)$ را نتیجه گرفت

آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است.

توجه داشته باشیم استدلال استقرایی با اصول استقراء که پس از آن بیان شد، از نظر مفهوم متفاوت است.

۶- حالت‌های رایج مهم :

* $1+2+3+\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
* $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
* $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$
* $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$
* $2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$
* $x,y>0 \Rightarrow \underbrace{\dfrac{x+y}{2}}_{\text{میانگین حسابی}} \geq \sqrt{xy}$ ← میانگین هندسی
* $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dots+\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\dots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$
* $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\dots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
* اگر $r\neq 1$ آنگاه $1+r+r^2+\dots+r^n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$

مثلاً اگر $r=\frac{1}{2}$ باشد $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dots+\dfrac{1}{2^n}=2-\dfrac{1}{2^n} \Rightarrow \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$

* $n!>3^n \;;\; n\geq 7$
* $n!>2^n \;;\; n\geq 4$
* $2^n>n^2 \;;\; n\geq 5$
* $(1+a)^n\geq 1+na \;;\; n\in\mathbb{N},\, a\geq -1$

مثلاً $(1+\sqrt{2})^n\geq 1+\sqrt{2}n$

* $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}) \Rightarrow a-b \mid a^n-b^n$
* $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a+1) \Rightarrow a-1 \mid a^n-1$

مثلاً $7 \mid 8^n-1$ زیرا $8-1 \mid 8^n-1$ و یا $15 \mid 4^{2n}-1$ زیرا $16-1 \mid 16^n-1$.

* $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dots+\dfrac{1}{2^n-1}<\dfrac{n}{2}$; $n\geq 3$
* $|x_1+x_2+\dots+x_n|\leq |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$

حالت خاص: $|a+b|\leq |a|+|b|$

۷- با اضافه شدن یک ضلع به یک n ضلعی محدب، به تعداد اقطار آن $n-1$ واحد افزوده می‌شود.
تعداد کل اقطار یک n ضلعی محدب $\frac{n(n-3)}{2}$ می‌باشد.

۸- با اضافه شدن یک ضلع به یک n ضلعی محدب، به مجموع زوایای داخلی آن 180° افزوده می‌شود.
مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب $(n-2)\times 180^\circ$ یا $(2n-4)\times 90^\circ$ می‌باشد.

۹- مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب 360° است.

۱۰- اصل خوش ترتیبی: هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی که تهی نباشد دارای عضو ابتدا است.

۱۱- همه اصول استقراء ریاضی که قبلاً بیان شد و اصل خوش ترتیبی معادل (هم ارز) یکدیگرند. یعنی از هر کدام دیگری بدست می‌آید.

۱۲- قضایای حملی (قضیه): احکامی هستند که همیشه برقرار می‌باشند.
۱۳- قضایای شرطی: قضایایی که به شکل «اگر ... آنگاه ...» بیان می‌شوند و آنها را به صورت $p \Rightarrow q$ می‌نویسند. به p فرض و به q حکم می‌گویند.
و می‌خوانند: اگر p آنگاه q - q اگر p - p نتیجه می‌دهد q - p شرط کافی است برای q -
q شرط لازم است برای p.

۱۴- یک گزاره شرطی به صورت $p \Rightarrow q$ در حالت کلی هنگامی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

۱۵- مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است، مثال نقض می‌گویند.
۱۶- عکس نقیض یک گزاره شرطی درست، نیز درست می‌باشد.

یعنی اگر $p \Rightarrow q$ درست باشد آنگاه $\sim q \Rightarrow \sim p$ نیز صحیح می‌باشد.

۱۷- هر گزاره شرطی به صورت $p \Rightarrow q$ در صورتیکه p نادرست باشد، درست است و می‌گوییم «عبارت شرطی به انتفاء مقدم برقرار است».

۱۸- چند نکته مهم:

- جمع دو عدد گنگ الزاماً گنگ نمی‌باشد. - حاصلضرب دو عدد گنگ الزاماً گنگ نمی‌باشد.
- ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگ، گنگ است مگر در حالتیکه عدد گویا صفر باشد.
- اگر x گویا و y گنگ باشد، $x+y$ گنگ است.

۱۹- عکس قضیه شرطی: اگر در یک قضیه شرطی جای فرض و حکم عوض گردد به عبارت حاصل عکس قضیه شرطی می‌گویند.

عکس قضیه شرطی الزاماً قضیه نمی‌باشد.

۲۰- قضیه دوشرطی: اگر عکس قضیه شرطی درست باشد به خود قضیه و عکس آن با یکدیگر قضیه دوشرطی می‌گویند.

و آن را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نشان داده و می‌خوانیم: اگر p آنگاه q و برعکس - اگر q آنگاه p و برعکس -

p اگر و فقط اگر q - p اگر و تنها اگر q - p شرط لازم و کافی است برای q - q شرط لازم و کافی است برای p.

۲۱- اثبات بازگشتی: گاهی برای اثبات بعضی احکام، با استفاده از درستی حکم به یک رابطه بدیهی و یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی برای اثبات حکم بایستی نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند. در اینصورت به این روش اثبات به روش بازگشتی می‌گویند.

۲۲- برهان خلف (اثبات غیرمستقیم): گاهی برای اثبات درستی یک حکم، فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد آنگاه با استفاده از استدلال استنتاجی به یک تناقض می‌رسیم. این تناقض می‌تواند با فرض اولیه و یا با اصولی که از قبل پذیرفته‌ایم باشد.

۲۳- اگر n^2 مضربی از عدد اول p باشد آنگاه n نیز مضرب p است.

۲۴- اگر n^2 مضرب p_1p_2 باشد که p_1 و p_2 اولند، آنگاه با استفاده از نکته بالا n مضرب p_1p_2 است.

۲۵- اگر ۲، ۳، ... ، p تمام اعداد اول کوچکتر یا مساوی p باشند، آنگاه عدد $N=(2\times 3\times \dots \times p)+1$ یا اول است و یا عامل اول بزرگتر از p دارد. از این نکته می‌توان نتیجه گرفت تعداد اعداد اول نامتناهی است.

۲۶- اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر، n لانه را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه‌ها باشد $(m>n)$ آنگاه حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو و یا بیشتر از دو کبوتر در آن قرار خواهند گرفت.

درصورتیکه m بر n بخش پذیر باشد، لانه‌ای وجود خواهد داشت که حداقل $\frac{m}{n}$ کبوتر در آن قرار می‌گیرند.

و " " " " " نباشد، " " " " " $[\frac{m}{n}]+1$ " " " ".

<u>بطور کلی می‌توان گفت</u> لانه‌ای وجود خواهد داشت که دست کم $[\frac{m-1}{n}]+1$ کبوتر در آن قرار می‌گیرند.

۲۷-

* اگر S یک زیرمجموعه ۶۵ عضوی از اعداد طبیعی باشد دست کم ... تای آنها در تقسیم بر ۲۵ دارای باقیمانده یکسان باشند.

* " " " " ۷۵ " " " " " " " " " " " ".

* در هر زیرمجموعه $n+1$ عضوی از اعداد طبیعی، حداقل دو عدد وجود دارند که باقی مانده تقسیم آنها بر n با هم برابر است.

* در هر زیرمجموعه $n+1$ عضوی $(n\in \mathbb{N})$ از اعداد $\{1,2,3,\dots,2n\}$ حداقل دو عدد یافت می‌شوند که یکی بر دیگری بخش پذیر است.

* ۵ نقطه داخل مربعی به ضلع a مفروضند. در اینصورت حداقل دو نقطه وجود خواهند داشت که فاصله آنها کوچکتر و یا مساوی ... است.

* ۱۰ نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a قرار دارند. در اینصورت حداقل دو نقطه وجود دارند بطوریکه فاصله‌شان کمتر از ... است.

* ۷ نقطه در مستطیلی به طول و عرض ۶ و ۴ در نظر می‌گیریم ثابت کنید فاصله دوتای آنها کوچکتر یا مساوی است.

* اگر ۵ نقطه داخل دایره‌ای به شعاع R در نظر بگیریم ثابت کنید دوتای آنها در فاصله‌ای کوچکتر یا مساوی قرار دارند.

* ۶ نقطه در مستطیلی به طول و عرض ۵ و ۱ در نظر می‌گیریم. ثابت کنید فاصله دوتای آنها کوچکتر یا مساوی است.

* هر زیرمجموعه $n+1$ عضوی از اعداد $A=\{1,2,\dots,2n\}$ حداقل دارای دو عضو است که مجموع آنها برابر $2n+1$ است.

* هر زیرمجموعه $n+1$ عضوی از اعداد $A=\{1,2,\dots,2n\}$ حداقل شامل دو عضو است که نسبت به هم اول‌اند.

* ۵ عدد طبیعی متمایز را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌شود حداقل دوتای آنها وجود دارند بطوریکه مجموع و یا تفاضل آنها بر ۷ بخش‌پذیر است. در حالت کلی برای هر $k+2$ عدد متمایز، لااقل دو عدد وجود دارند که مجموع و یا تفاضل آنها بر $2k+1$ بخش‌پذیر است.

* حداقل نفر باید در یک جمع حضور داشته باشند بطوریکه مطمئن شویم حداقل ۷ نفر از آنها در یک روز هفته بدنیا آمده‌اند.

* در جعبه‌ای ۷ مهره به رنگهای سبز، زرد و قرمز وجود دارد. این مهره‌ها را در دو جعبه قرار می‌دهیم. آنگاه حداقل در یکی از این دو جعبه دست کم دو مهره هم‌رنگ وجود دارد.

۲۸ـ چند رابطه دیگر را اثبات کنید:

* $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

* $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\dots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$

* $L_k: 1,3,4,7,11,18,29,47,\dots$ دنباله اعداد لوکا
  $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}\ ;\ n\geq 3\ ,\ L_1=1, L_2=3$ داریم
  $\Longrightarrow L_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$

* $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\ ;\ n\geq 2$

* $\frac{n}{n+1}\leq\frac{n+1}{n+2}\ ;\ n\in \mathbb{R}^{>-1}$

بخش دوم

مجموعه‌ها

۱- گزاره‌نما عبارتی است شامل متغیری مانند x که هرگاه هر عضو از مجموعه مرجع U مانند a را به جای x قرار دهیم جمله حاصل یا صحیح درست باشد یا صحیح نادرست. مثلاً $\underbrace{3 < x \le 7}_{P(x)\ \text{گزاره‌نما}}$ در مجموعه اعداد حقیقی یک گزاره‌نما است.

۲- عبارت $x \in A$ یعنی x عضو A است. یا x متعلق به مجموعه A است.

عبارت $A \subseteq B$ یعنی A زیرمجموعه B است و بدین معناست که همه اعضای A متعلق به B نیز می‌باشند.

$$(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

۳- اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$ آنگاه A را زیرمجموعه سره یا محض B می‌گویند.

۴- مجموعه تهی که آن را با $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهند مجموعه‌ای است که عضوی ندارد. با این توضیح داشت مجموعه‌ی

$A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\ \}\}\}$ ، عضو دارد.

۵- چند نکته از زیرمجموعه‌ها: بین رابطه زیرمجموعه بودن در حالت کلی خاصیت هم‌ارزی ندارد.

* $A \subseteq A$ هر مجموعه زیرمجموعه خودش است (بازتابی)
* $A \subseteq B \not\Rightarrow B \subseteq A$ تقارنی ندارد.
* $A \subseteq B,\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (ترایایی)
* $A \subseteq B,\ B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (پادتقارنی)

* $\varnothing \subseteq A$ تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست
* $A \subseteq U$ مجموعه مرجع U
* $A \subseteq \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$
* $U \subseteq A \Rightarrow A = U$

۶- عدد اصلی یک مجموعه: تعداد اعضای یک مجموعه متناهی مانند A را که با $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهند عدد اصلی آن مجموعه می‌گویند.

۷- تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی: $\binom{n}{k}$

تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی: 2^n

از آنجائیکه $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ پس تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی و $n-k$ عضوی از یک مجموعه n عضوی با هم برابرند.

توضیح یادآوری: $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$ ، $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ، $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ ، $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

مهندس تفرشی

Subject: ۸

Year. Month. Day.

۸- بدیهی است تعداد زیرمجموعه‌های محض (سره) A برابر 2^n-1 می باشد.

۹- مجموعه توانی A را که با $P(A)$ نشان می دهند، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A است. پس $n(P(A))=2^{n(A)}$.

۱۰- هر مجموعه مانند A دارای زیرمجموعه سره است بجز از مجموعه تهی که زیرمجموعه سره ندارد.

۱۱- متمم مجموعه A که آن را با $\bar{A}$ یا A' نشان می دهیم، مجموعه‌ای است شامل همه اعضای مجموعه مرجع U بطوریکه در A نباشند.

$$A'=U-A$$

۱۲- اجتماع دو مجموعه A و B : مجموعه‌ای است که اعضایش همه اعضای A و همه اعضای B را شامل می شود. به عبارت دیگر اعضایش یا متعلق به A، یا متعلق به B و یا متعلق به هر دو هستند.

$$x\in(A\cup B)\iff x\in A \vee x\in B$$

۱۳- اشتراک دو مجموعه A و B : مجموعه‌ای است شامل اعضایی که به هر دو مجموعه A و B تعلق داشته باشند.

$$x\in(A\cap B)\iff x\in A \wedge x\in B$$

۱۴- خواص و ویژگی‌های مهم متمم، اجتماع و اشتراک (جبر مجموعه‌ها)

۱ * $\varnothing'=U$ * $(A')'=A$ * $A\cap A'=\varnothing$ * $A\cap A=A$ خواص خودتوانی

* $U'=\varnothing$ * $A=B\iff A'=B'$ * $A\cup A'=U$ * $A\cup A=A$

* $A\cup U=U$ * $A\cap U=A$ * $A\cup\varnothing=A$ * $A\cap\varnothing=\varnothing$

۲ * $\begin{cases}A\cup B=B\cup A\\ A\cap B=B\cap A\end{cases}$ خاصیت جابجایی

۳ * $\begin{cases}A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C\\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C\end{cases}$ خواص شرکت پذیری (انجمنی)

۴ * $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ → اجتماع نسبت به اشتراک

* $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ → اشتراک نسبت به اجتماع

خواص پخشی (توزیع پذیری)

۵ * $A\subseteq A\cup B$

* $A\cap B\subseteq A$ $\Rightarrow$ * $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$

۶ * $A\cup B=B\iff A\subseteq B$ * $A\cap B=B\iff B\subseteq A$

مهندس قریشی

ادامه ویژگی‌ها:

۷ * $\left.\begin{array}{l}A\subseteq B\\ A\subseteq C\end{array}\right\}\Rightarrow A\subseteq B\cup C$ * $\left.\begin{array}{l}A\subseteq B\\ A\subseteq C\end{array}\right\}\Rightarrow A\subseteq B\cap C$

۸ * $A\subseteq B \Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$ * $A\subseteq B\Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap C$

۹ * $\left.\begin{array}{l}B\subseteq C\\ A\subseteq C\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup B\subseteq C$ * $\left.\begin{array}{l}B\subseteq C\\ A\subseteq C\end{array}\right\}\Rightarrow A\cap B\subseteq C$

۱۰ * $\left.\begin{array}{l}A\subseteq B\\ C\subseteq D\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup D$ * $\left.\begin{array}{l}A\subseteq B\\ C\subseteq D\end{array}\right\}\Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap D$

۱۱ * $A\subseteq B\ ,\ A'\subseteq B \Rightarrow B=U$

۱۲ * $A\subseteq B\ ,\ A\subseteq B' \Rightarrow A=\varnothing$

۱۳ * $(A\cap B)'=A'\cup B'$
$(A\cup B)'=A'\cap B'$ قوانین دمورگان

۱۴ * $A\cap(A\cup B)=A$
$A\cup(A\cap B)=A$ قوانین جذب

۱۵ * $A\cap(A'\cup B)=A\cap B$ قوانین شبه جذب (همسانی) - ۱۷ * $A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\subseteq B',B\subseteq A'$
$A\cup(A'\cap B)=A\cup B$

۱۶ * $A\subseteq B\Leftrightarrow B'\subseteq A'$ ۱۸ * $A\cap B=A\cup B\Rightarrow A=B$

۱۵- تفاضل دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه $A-B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن متعلق به A بوده ولی متعلق به B نباشند. بدیهی است

$A-B\subseteq A\ ,\ B-A\subseteq B$

۱۶- ویژگی‌های تفاضل:

* $A-B=A\cap B'$
* $A-B=A-(A\cap B)$ * $A-B=B'-A'$
* $A-B=(A\cup B)-B$

* $\begin{matrix} A-U=\varnothing \\ U-A=A' \end{matrix}$ * $\begin{matrix} A-\varnothing=A \\ \varnothing-A=\varnothing \end{matrix}$ * $\begin{matrix} A-A'=A \\ A'-A=A' \end{matrix}$

* بطور کلی اگر $A\cap B=\varnothing$ آنگاه $A-B=A$, $B-A=B$.

* $A-A=\varnothing$

۱۷- تفاضل متقارن: تفاضل متقارن دو مجموعه که آن را با $A\Delta B$ نمایش می دهند اعضایی که در A یا B باشند ولی در $A\cap B$ نباشند.

مختصراً که

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$$
$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

۱۸- دو مجموعه "جدا از هم" یا "مجزا": دو مجموعه A و B را مجزا یا جدا از هم گوئیم هرگاه $A\cap B=\varnothing$.
مثلاً A و A' یا $A-B$, $B-A$.
سه مجموعه A و B و C مجزا هستند هرگاه $A\cap B=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$. (توجه داشته باشید هر سه شرط باید برقرار باشند.)

۱۹- ویژگی تفاضل متقارن:

* $A\Delta B=B\Delta A$ خاصیت جابجایی
* $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$ خاصیت شرکت پذیری

* $A\Delta A=\varnothing$, $A\Delta A'=U$, $A\Delta\varnothing=A$, $A\Delta U=A'$

* $A\Delta B=\varnothing \iff A=B$

۲۰- عمل (-) از سمت راست روی $\cup$ و $\cap$ و $-$ و Δ خاصیت پخشی (توزیع پذیری) دارد.

$$\begin{cases} (A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C) \\ (A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C) \\ (A-B)-C=(A-C)-(B-C) \\ (A\Delta B)-C=(A-C)\Delta(B-C) \end{cases}$$

۲۱- دقت کنید

$$\begin{cases} A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C) \\ A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C) \end{cases} \quad \cup\leftrightarrow\cap$$

۲۲- دقت کنید

$A\cup(B-C) \neq (A\cup B)-(A\cup C)$

$A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C)$

۲۳- $\cap$ و Δ روی یکدیگر پخش‌پذیرند.

$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C) \qquad (B\Delta C)\cap A = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$

$A\Delta(B\cap C)=(A\Delta B)\cap(A\Delta C) \qquad (B\cap C)\Delta A = (A\Delta B)\cap(A\Delta C)$

۲۴-

$A\cup B=A\cup C \not\Rightarrow B=C$

$A\cap B=A\cap C \not\Rightarrow B=C$

$A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B=C$ امّا

۲۵-

$\begin{cases} A\cup B=A\cup C \\ A\cap B=A\cap C \end{cases} \Rightarrow B=C$

۲۶-

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup A_3 \cdots \cup A_n$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap A_3 \cdots \cap A_n$

۲۷- اصل شمول و عدم شمول

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ دو مجموعه

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$ سه مجموعه

۲۸-

$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(B)$

$n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$

$n(A'\cup B')=n(U)-n(A\cap B)$

$n(A\cup B')=n(U)-n(A'\cap B)=n(U)-(n(B)-n(A\cap B))$

$=n(U)-n(B)+n(A\cap B)=n(B')+n(A\cap B)$

$n(A')=n(U)-n(A)$

$n(A\Delta B)=n(A)+n(B)-2n(A\cap B)$

۲۹-

$A\subseteq B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

$A=B \Leftrightarrow P(A)=P(B)$ همین ترتیب

۳۰- بدیهی است اگر $A\cup B=\varnothing$ آنگاه $A=B=\varnothing$ و اگر $A\cap B=U$ آنگاه $A=B=U$.

۳۱- $P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$

امّا $P(A\cup B) \neq P(A)\cup P(B)$

بلکه:

$$P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$$

۳۲-

اگر $A\cup B = U \nRightarrow B = A'$

اگر $A\cap B = \varnothing \nRightarrow B = A'$

امّا اگر $\begin{cases} A\cup B = U \\ A\cap B = \varnothing \end{cases} \Rightarrow B = A'$ (یعنی A و B متمم یکدیگرند.)

۳۳- افراز یک مجموعه: اگر A یک مجموعه غیرتهی باشد گوئیم A به n زیرمجموعه A_1 ، A_2 ، ... ، A_n افراز شده است (پارتیشن بندی شده است) اگر:

1) $\forall i : A_i \neq \varnothing$ هیچیک تهی نباشند

2) $\forall i\neq j ; A_i \cap A_j = \varnothing$ اشتراک دو به دوی آنها تهی باشد

3) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ اجتماع همه آنها برابر A باشد.

مثلاً $Z_O = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ و $\mathbb{Z}_E = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, \ldots\}$ افرازی ات از $\mathbb{Z}$ هستند.

۳۴- اگر $A\neq\varnothing$ ، $A'\neq\varnothing$ آنگاه A ، A' افرازهای از مجموعه U هستند.

۳۵- تعداد افرازهای مجموعه های ۱ تا ۵ عضوی:

تعداد افرازهای مختلف یک مجموعه n عضوی

n	
۱	
۲	
۳	
۴	
۵	

بخش سوم
حاصلضرب دکارتی

۱- حاصلضرب دکارتی مجموعه A در B که آن را با $A\times B$ نشان می‌دهیم مجموعه همه زوج مرتب‌هایی مانند (a,b) است که a عضوی از A و b عضوی از B است.

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\ ,\ b\in B\}$$

اگر $A=B$ باشد $A\times A$ را A^2 نشان می‌دهیم.
پس $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ یعنی $\mathbb{R}^2$ تمام صفحه مختصات خواهد بود.

بطور مثال اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}\ ;\ 1<x\leq 3\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\leq x<4\}$ آنگاه نمودار $A\times B$ و $B\times A$ بصورت زیر است.

همینطور نمودار $A\times B$ که در آن $B=[2,3]$ و $A=(-1,4]$ بصورت زیر است.

۲- چند نکته در حاصلضرب دکارتی:

$A\times B\neq B\times A$

$\varnothing\times A=A\times\varnothing=\varnothing$

$A\times B=\varnothing\Longleftrightarrow A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$

$A\times B=B\times A\Longleftrightarrow A=B$ یا $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$

$A\neq\varnothing\ ,\ A\times B\subseteq A\times C\Longrightarrow B\subseteq C$

$A\neq\varnothing\ ,\ A\times B=A\times C\Longrightarrow B=C$

$C\neq\varnothing\ ,\ A\times C\subseteq B\times C\Longrightarrow A\subseteq B$

۳- توجه: $(x,y)=(p,q)\Longleftrightarrow x=p\ ,\ y=q$

۴- دیگر نکات:

$A\times B=C\times D\Longleftrightarrow A=C\ ,\ B=D$

$A\times B\subseteq C\times D\Longleftrightarrow A\subseteq C\ ,\ B\subseteq D$

$P(A\times B)\neq P(A)\times P(B)$

۵- حاصلضرب دکارتی نسبت به اجتماع، اشتراک، تفاضل و تفاضل متقارن توزیع پذیر است چه از راست و چه از چپ.

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ $\quad$ $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$ $\quad$ $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$ $\quad$ $A\times(B\Delta C)=(A\times B)\,\Delta\,(A\times C)$

$(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$ $\quad$ $(B\Delta C)\times A=(B\times A)\,\Delta\,(C\times A)$

۶- $(x,y)\in A\times B \Rightarrow x\in A$ و $y\in B$

$(x,y)\notin A\times B \Rightarrow x\notin A$ یا $y\notin B$

۷- الف) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

اما ب) $(A\times B)\cup(C\times D)\neq(A\cup C)\times(B\cup D)$

۸- $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$

۹- $n(A\times B)=n(A)\times n(B)=n(B\times A)$

$n(A^{2})=n(A\times A)=(n(A))^{2}$

۱۰-

$$\left.\begin{aligned}
&* \ (A\times B)\cap(A\times C)=A\times(B\cap C)\\
&* \ (A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(B\cap A)=(A\cap B)^{2}\\
&* \ A^{2}\cap B^{2}=(A\times A)\cap(B\times B)=(A\cap B)\times(A\cap B)=(A\cap B)^{2}
\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$*\ (A\times B)\cap(B\times A)=A^{2}\cap B^{2}=(A\cap B)^{2}$$

۱۱- با توجه به نکته ۱۰ : $*\ n((A\times B)\cap(B\times A))=n(A^{2}\cap B^{2})=(n(A\cap B))^{2}$

$*\ n((A\times B)\cup(B\times A))=2n(A\times B)-(n(A\cap B))^{2}$ با توجه به اصل شمول و عدم شمول

مهندس تفرشی

Subject: ۱۵

Year. Month. Day.

$* \; n(A^2 - B^2) = (n(A))^2 - (n(A\cap B))^2$

$* \; n((A\times B) - (B\times A)) = n(A)n(B) - (n(A\cap B))^2$

۱۲- الف) $(A\times B) \cap (B\times A) = \emptyset \Leftrightarrow (A\cap B)\times(A\cap B) = \emptyset \Leftrightarrow A\cap B = \emptyset$

ب) $(A\times B) \cup (B\times A) = \emptyset \Leftrightarrow A\times B = \emptyset \,,\, B\times A = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$

Page: